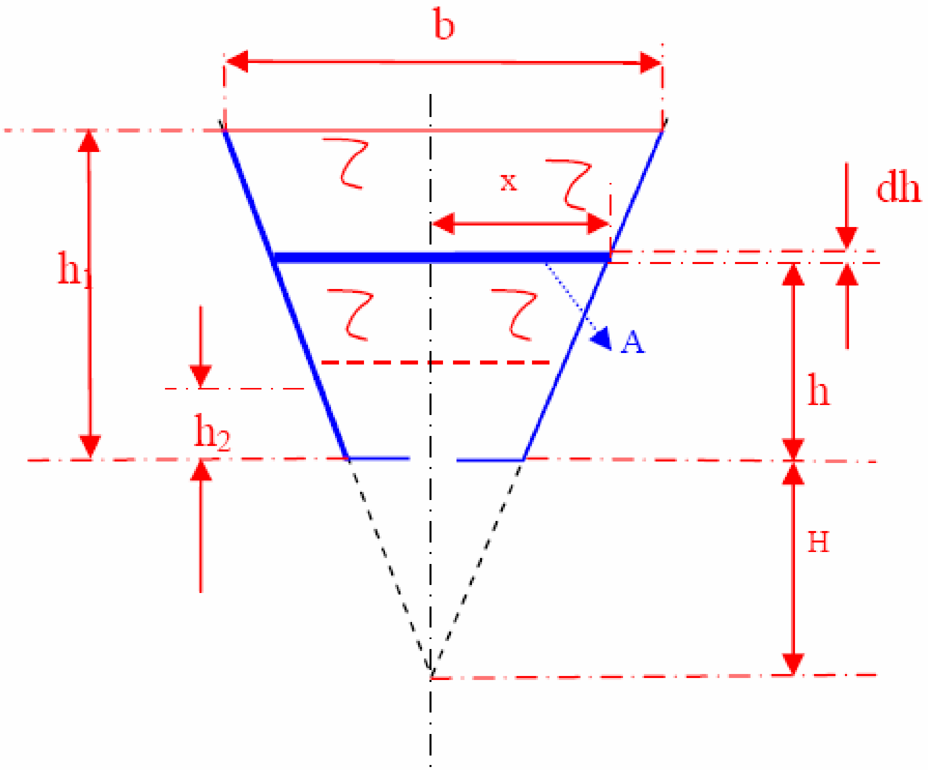
Décima aula

Complemento de mecânica dos fluidos

Deduzir a expressão para cálculo do tempo de esvaziamento de um reservatório tronco-cônico que tem um orifício em sua parte inferior.



Dados:

A = área da seção transversal do tronco de cone 'a altura h sobe o orifício.

A_0 = área do orifício

Parte-se da equação da continuidade:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{VC}\rho \times dV + \int_{SC}\rho \times \vec{v} \times \vec{n} \times dA = 0\,.$$

No caso, tem-se que $\rho = \text{constante}$, portanto:

$$\rho \times \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} dV + \rho \times \int_{SC}\vec{v} \times \vec{n} \times dA = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\int_{VC} dV + \int_{SC}\vec{v} \times \vec{n} \times dA = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + v_{jato} \times A_{contraída} = 0$$

Como o volume só varia com o tempo, pode-se considerar a derivada total ao invés da derivada parcial, o que resulta:

$$\frac{dV}{dt} + v_{jato} \times A_{contraída} = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -c_v \times \sqrt{2gh} \times c_c \times A_{orifício}$$

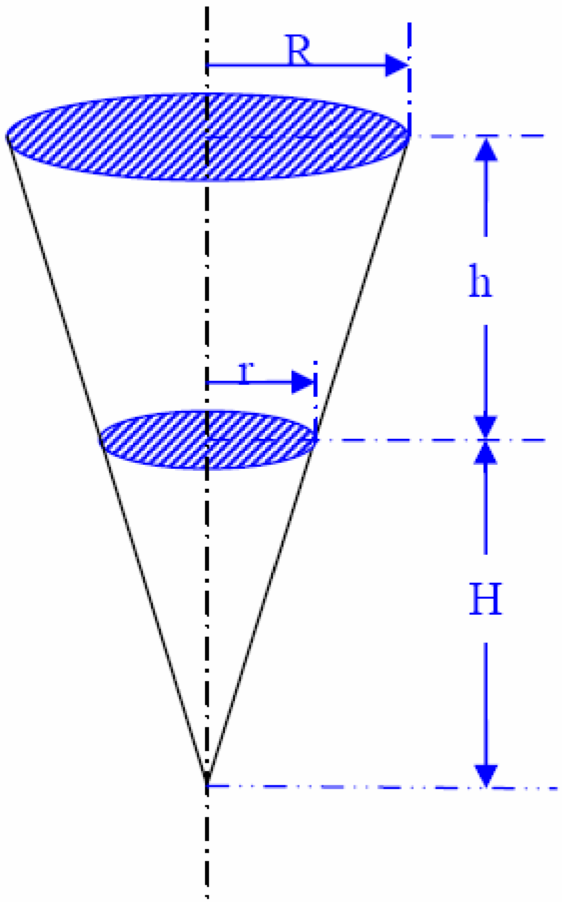
Sabe-se que: $c_c \times c_v = c_d$, que $A_{orifício} = A_o$ e como o recipiente da questão encontra-se aberto, isto resulta:

$$dt = -\frac{dV}{c_d \times \sqrt{2g} \times A_o \times \sqrt{h}}$$

A expressão anterior representa a equação genérica para o cálculo do tempo
de esvaziamento de um reservatório aberto à atmosfera, onde para resolvê-la
deve-se saber calcular o dV

Apresenta-se a seguir duas maneiras para se calcular o dV.

1ª maneira: calcula-se o volume do tronco de cone e depois se obtém a sua derivada dV/dh



$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 (h + H) - \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

Por semelhança de triângulos, tem - se que :

$$\frac{R}{r} = \frac{h+H}{H} \therefore R = \frac{r}{H}(h+H) \Rightarrow R^2 = \frac{r^2}{H^2}(h+H)^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{H^2}(h+H)^2 (h+H) - \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{H^2}(h+H)^3 - \frac{1}{3}\pi r^2 H$$

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}\pi \frac{r^2}{H^2} 3(h+H)^2 - 0 = \frac{\pi r^2}{H^2}(h+H)^2$$

$$\therefore dV = \frac{\pi r^2}{H^2}(h+H)^2 dh$$

Retornando-se a expressão para o cálculo do tempo de esvaziamento de um reservatório aberto à atmosfera, tem-se:

$$dt = -\frac{\frac{\pi r^2}{H^2}(h+H)^2 dh}{c_d\sqrt{2g}A_o\sqrt{h}} = -\frac{\pi r^2}{H^2 c_d\sqrt{2g}A_o}\frac{(h+H)^2}{\sqrt{h}}dh = -\frac{\pi r^2}{H^2 c_d\sqrt{2g}A_o}\left(\frac{h^2+2Hh+H^2}{h^{1/2}}\right)dh$$

$$dt = -\frac{\pi r^2}{H^2 c_d\sqrt{2g}A_o}\left(h^{3/2}+2Hh^{1/2}+H^2h^{-1/2}\right)dh$$

Para resolver a equação anterior, deve-se integrá-la de t=0s (nível do fluido em h_1) até t (s) (nível do fluido em h_2):

$$\int_0^t dt = -\frac{\pi r^2}{H^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \int_{h_1}^{h_2} (h^{3/2} + 2Hh^{1/2} + H^2 h^{-1/2}) dh$$

$$\int_0^t dt = \frac{\pi r^2}{H^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \int_{h_2}^{h_1} (h^{3/2} + 2Hh^{1/2} + H^2 h^{-1/2}) dh$$

$$t = \frac{\pi r^2}{H^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \left[\left. \frac{h^{5/2}}{5/2} \right|_{h_2}^{h_1} + 2H \left. \frac{h^{3/2}}{3/2} \right|_{h_2}^{h_1} + H^2 \left. \frac{h^{1/2}}{1/2} \right|_{h_2}^{h_1} \right]$$

$$t = \frac{\pi r^2}{H^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \left[\frac{2}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) + \frac{4H}{3}(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) + 2H^2(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \right]$$

Na expressão anterior o tempo é calculado em função do raio menor do tronco cone, para se obter em função do raio maior (nível do fluido em h_1),recorre-se novamente a semelhança de triângulo, onde se tem:

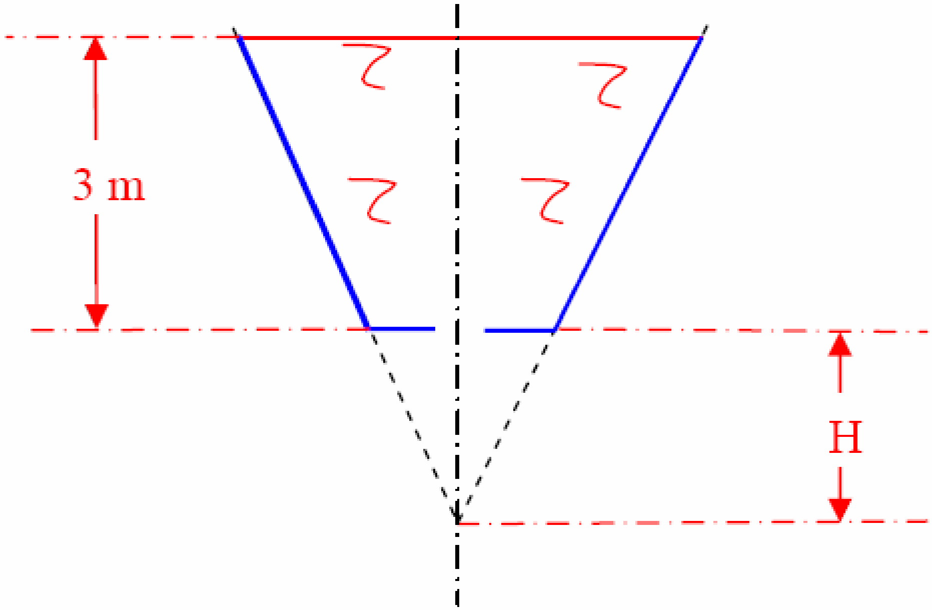
$$\frac{R}{h_1 + H} = \frac{r}{H} \therefore \frac{R^2}{(h_1 + H)^2} = \frac{r^2}{H^2}$$

$$t = \frac{\pi R^2}{(h_1 + H)^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \left[\frac{2}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) + \frac{4H}{3}(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) + 2H^2(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \right]$$

$$\text{Considerando - se que } R = \frac{b}{2} \Rightarrow R^2 = \frac{b^2}{4}, \text{portanto:}$$

$$t = \frac{\pi b^2}{4(h_1 + H)^2 c_d \sqrt{2g} A_o} \left[\frac{2}{5}(h_1^{5/2} - h_2^{5/2}) + \frac{4H}{3}(h_1^{3/2} - h_2^{3/2}) + 2H^2(h_1^{1/2} - h_2^{1/2}) \right]$$

Uma torre com formato de tronco de cone tem diâmetros iguais a 3,2 m e 1,6 m na superfície máxima e no fundo respectivamente. Admitindo-se que a altura de carga máxima é m h_1 = 3m , calcular o diâmetro do orifício localizado no fundo da torre, de modo a esvaziá-lo totalmente em 7 minutos.



Dados:

C_d = 0,60

g = 9,8 m/s^2

Desprezam-se os efeitos do vórtice.