

Objetivos do estudo de superfície plana submersa - unidade 2:

Mencionar em que situações têm-se uma distribuição uniforme de pressões em uma superfície plana submersa;

Mostrar as maneiras de calcular o módulo da força resultante da distribuição uniforme das pressões em uma superfície plana submersa;

Demonstrar que o módulo da força resultante de uma distribuição não uniforme de pressões em uma superfície plana submersa é igual ao produto da pressão que age no centro de gravidade da superfície pela área da mesma que está em contato com o fluido;

Determinar o ponto de aplicação da força resultante em superfícies planas submersas;

Apresentar tabelado, tanto a ordenada do centro de gravidade como o momento de inércia, para figuras planas comumente usadas em aplicações da Engenharia;

Apresentar as equações dimensionais das grandezas estudadas nesta unidade;

Mencionar as principais unidades de pressão;

Dar as relações entre unidades de pressão, que são comumente utilizadas na Engenharia;

Objetivos do estudo de superfície plana submersa - unidade 2 (cont.):

Relatar algumas considerações sobre fluidos manométricos utilizados em manômetros de coluna de líquido.

2.9 Forças em superfícies planas submersas

Geralmente os cursos básicos de Mecânica dos Fluidos são ministrados em paralelo aos cursos de Mecânica Geral e de Resistência dos Materiais, ambos responsáveis pelos estudos de conceitos básicos que são pré-requisitos para o estudo das forças em superfícies planas submersas.

Por este motivo, não iremos esgotar o assunto, mas apenas introduzi-lo abordando os conceitos básicos, que serão pré-requisitos para alguma disciplina futura, como Hidráulica, Máquinas Hidráulica, ...

2.9.1 Cálculo do módulo da força resultante em superfícies planas submersas

As forças que atuam em uma superfície plana submersa são originadas pelas pressões dos pontos fluidos em contato com a superfície plana submersa, e estas pressões podem apresentar dois tipos de distribuição ao longo da superfície:

1ª - As pressões apresentam uma distribuição uniforme ao longo da superfície. Esta situação ocorre para os seguintes casos:

- **para líquidos:** a superfície encontra-se em um plano horizontal;
- **para gases:** a superfície encontra-se em uma posição qualquer, desde que o seu comprimento na vertical seja inferior a 100 m.

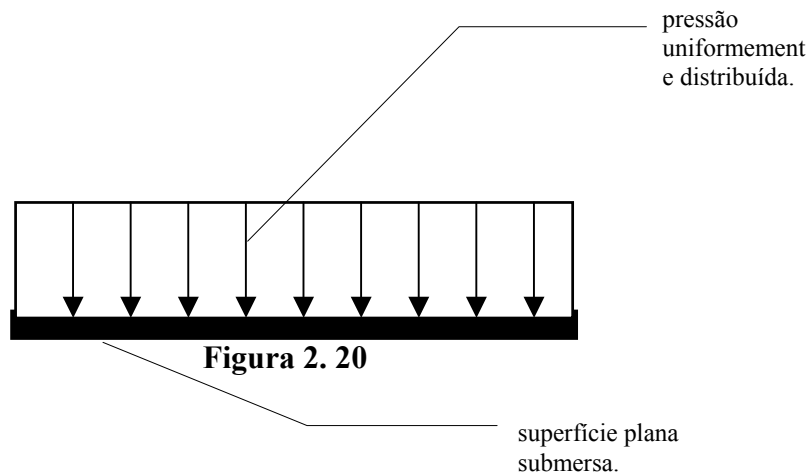
Evocando a equação 2.2, podemos afirmar que nesta situação a força resultante será igual ao produto da pressão pela área da superfície em contato com o fluido:

$$|F_R| = p \cdot A$$

Equação 2. 24

A equação 2.24 pode ser facilmente demonstrada, evocando que o módulo da força resultante é igual ao volume do diagrama de pressão.

Consideramos a situação representada pela figura 2.20.



A figura 2.21 representa o volume formado pelo diagrama de pressão, onde A é a área da superfície plana submersa em contato com o fluido e V é o volume do diagrama de pressão.

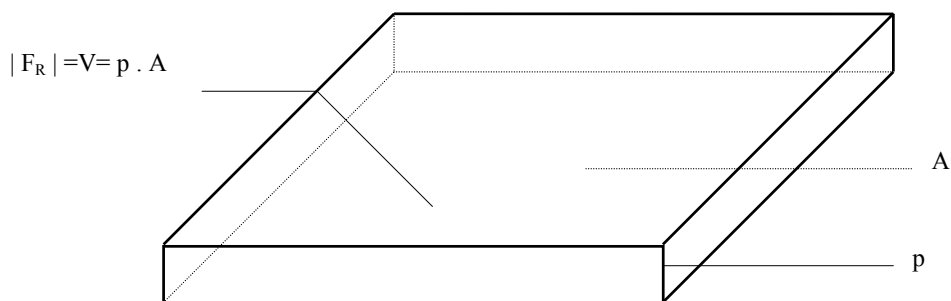


Figura 2. 11

2ª - As pressões não são uniformemente distribuídas nas superfícies planas submersas

Esta segunda situação representa o que geralmente ocorre em comportas planas, caracterizando um exemplo típico da Engenharia Civil.

Para estudá-la, consideramos a situação descrita pela figura 2.22, onde a única restrição é existir uma superfície livre, ou seja, o líquido está em contato com o ar atmosférico.

Na figura 2.22 a superfície plana submersa encontra-se no eixo Oy e foi projetada no plano xOy , onde:

- A = área da superfície plana submersa;
- θ = ângulo qualquer;
- CG = centro de gravidade da figura.

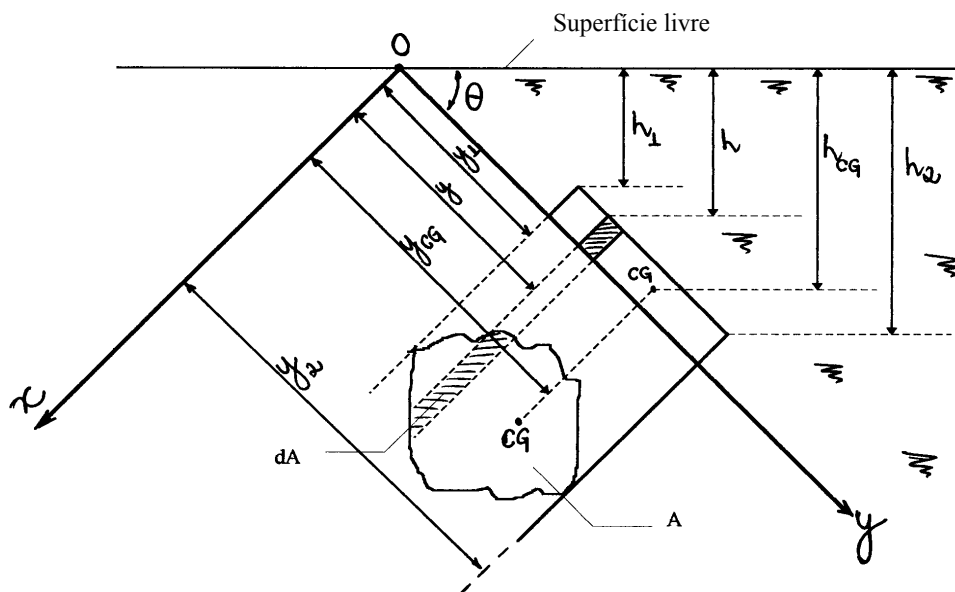


Figura 2. 22

Pela hipótese do contínuo, consideramos um ponto fluido apresentando dimensões elementares, portanto podemos considerar o dA como sendo um ponto fluido, o que corresponde que no mesmo atua a pressão: $p = p_{atm} + \gamma \cdot h$. Trabalhando na escala efetiva, temos: $p = \gamma \cdot h$.

Analisaremos apenas um dos lados da superfície, o que equivale a considerar fluido somente a sua direita.

A pressão p agindo em dA origina uma força, cujo módulo é: $dF_N = p \cdot dA$, onde dF_N é normal a superfície plana submersa, cujo módulo também pode ser calculado da seguinte maneira: $dF_N = \gamma \cdot h \cdot dA$.

Através da figura 2.22, podemos escrever que: $\text{sen}\theta = \frac{h}{y}$, portanto:

$$dF_N = \gamma \cdot y \cdot \text{sen}\theta \cdot dA.$$

Para calcular o módulo da força resultante, integramos: $|F_R| = \gamma \cdot \text{sen}\theta \cdot \int_A y \cdot dA$.

Evocando o cálculo da ordenada do centro de gravidade, temos: $y_{CG} = \frac{1}{A} \int_A y \cdot dA$,

portanto: $|F_R| = \gamma \cdot \text{sen}\theta \cdot y_{CG} \cdot A$.

Através da figura 2.22, podemos escrever que: $y_{CG} \cdot \text{sen}\theta = h_{CG}$, que dá origem a expressão utilizada para o cálculo do módulo da força resultante em superfícies planas submersas:

$$|F_R| = \gamma \cdot h_{CG} \cdot A = p_{CG} \cdot A \quad \text{Equação 2. 15}$$

Conclusão: O módulo da força resultante em superfícies planas, submersas em um fluido de superfície livre, será igual ao produto da pressão que atua no centro de gravidade (CG) da figura pela área em contato com o fluido.

2.9.2 Determinação do ponto de aplicação da força resultante em superfícies planas submersas

O ponto de aplicação da força resultante em superfícies planas submersas é denominado de **centro de pressões** e só coincide com o centro de gravidade, quando temos uma distribuição uniforme das pressões na superfície considerada.

A medida que a superfície plana se afasta da superfície livre, menor será a distância entre o centro de pressões (cp) e o centro de gravidade (CG).

Calculemos o momento originado pela força dF_N em relação ao eixo 0x da figura 2.22:

$$dM = dF_N \cdot y = \gamma \cdot y^2 \cdot \text{sen}\theta \cdot dA \quad \text{Equação 2. 26}$$

Integrando a equação 2.26, resulta: $F_R \cdot y_{cp} = \gamma \cdot \text{sen}\theta \cdot \int_A y^2 \cdot dA$,

onde $\int_A y^2 \cdot dA$ representa o **momento de inércia da área A em relação ao eixo 0x** (I_0),

portanto:

$$y_{cp} = \frac{\gamma \cdot \text{sen}\theta \cdot I_0}{\gamma \cdot \text{sen}\theta \cdot y_{CG} \cdot A} = \frac{I_0}{y_{CG} \cdot A} \quad \text{Equação 2. 27}$$

Evocando o teorema de translação de eixos devido a Steiner, onde se considera o eixo passando pelo CG da superfície de área A , podemos escrever que: $I_O = I_{CG} + y_{CG}^2 \cdot A$, portanto:

$$y_{cp} = y_{CG} + \frac{I_{CG}}{y_{CG} \cdot A} \qquad \text{Equação 2. 28}$$

Observações: 1ª - Determinar o y_{cp} equivale a determinar o CG do diagrama de pressões.

2ª - Os principais valores para $I_{CG} = I_G$ e y_G são mostrados pela tabela 2.1, onde devemos observar que nem sempre y_G é igual a y_{CG} .

**Ao meu redor
o que vejo assusta-me
fome, miséria, opressão
inexistência de vida.**

**Em meu interior
a certeza
de poder criar
um mundo melhor.**

Raimundo Ferreira Ignácio

Figura	Área e momento de inércia	Centro de gravidade
	$A = a \cdot b$ $I_G = \frac{b \cdot a^3}{12}$	$x_G = \frac{b}{2}$ $y_G = \frac{a}{2}$
	$A = a^2$ $I_G = \frac{a^4}{12}$	$x_G = y_G = \frac{a}{2}$
	$A = bH = ab \operatorname{sen} \alpha$ $I_G = \frac{bH^3}{12}$	$x_G = \frac{b + H \cos \alpha}{2}$ $y_G = \frac{H}{2}$
	$A = \frac{(a + b) H}{2}$ $I_G = \frac{H^3 (a^2 + 4 a b + b^2)}{36 (a + b)}$	$y_G = \frac{H (a + 2 b)}{3 (a + b)}$ <p>onde a = base menor no eixo OX</p>
	$A = \frac{(a + b) H}{2}$ $I_G = \frac{H^3 (a^2 + 4 a b + b^2)}{36 (a + b)}$	$y_G = \frac{H (2 a + b)}{3 (a + b)}$ <p>onde b = base maior no eixo OX</p>
	$A = \frac{d_1 d_2}{2}$ $I_G = \frac{d_1 (d_2)^3}{48}$	$x_G = \frac{d_1}{2}$ $y_G = \frac{d_2}{2}$

Tabela 2.1

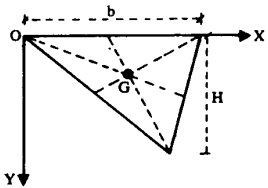
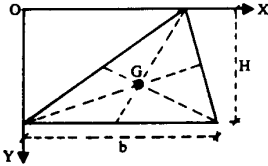
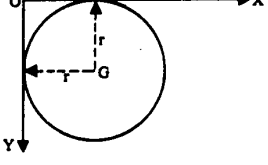
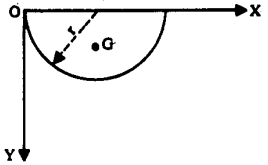
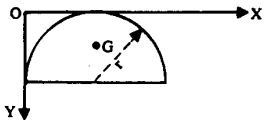
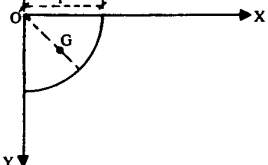
Figura	Área e momento de inércia	Centro de gravidade
	$A = \frac{b H}{2}$ $I_G = \frac{b H^3}{36}$	$y_G = \frac{H}{3}$ <p>G = interseção das medianas</p>
	$A = \frac{b H}{2}$ $I_G = \frac{b H^3}{36}$	$y_G = \frac{2 H}{3}$ <p>G = interseção das medianas</p>
	$A = \pi r^2$ $I_G = \frac{\pi r^4}{4}$	$x_G = y_G = r$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $I_G = \frac{r^4 (9 \pi^2 - 64)}{72 \pi}$	$x_G = r$ $y_G = \frac{4 r}{3 \pi}$
	$A = \frac{\pi r^2}{2}$ $I_G = \frac{r^4 (9 \pi^2 - 64)}{72 \pi}$	$x_G = r$ $y_G = \frac{(3 \pi - 4)r}{3 \pi}$
	$A = \frac{\pi r^2}{4}$ $I_G = 0,055 r^4$	$x_G = y_G = \frac{4 r}{3 \pi}$

Tabela 2.1 (cont.)

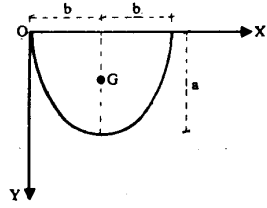
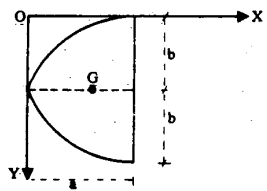
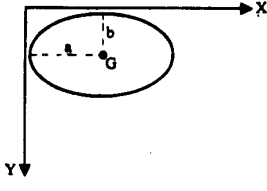
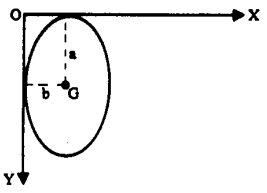
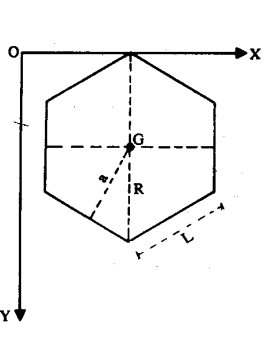
Figura	Área e momento de inércia	Centro de gravidade
	$A = \frac{4 a b}{3}$ $I_G = \frac{16 a^3 b}{175}$	$x_G = b$ $y_G = \frac{2 a}{5}$
	$A = \frac{4 a b}{3}$ $I_G = \frac{4 a b^3}{15}$	$x_G = \frac{3 a}{5}$ $y_G = b$
	$A = \pi a b$ $I_G = \frac{\pi a b^3}{4}$	$x_G = a$ $y_G = b$
	$A = \pi a b$ $I_G = \frac{\pi b a^3}{4}$	$x_G = b$ $y_G = a$
 <p data-bbox="395 1626 576 1648">Polígono regular de n lados</p>	$A = \frac{L a n}{2}$ $I_G = \frac{L a n (6 R^2 - L^2)}{48} =$ $= \frac{L a n (12 a^2 + L^2)}{96}$	<p data-bbox="1007 1420 1273 1491">G = centro da circunferência circunscrita</p>

Tabela 2.1 (cont.)

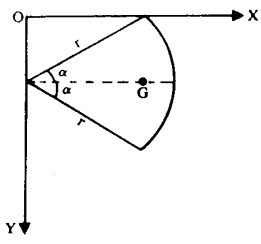
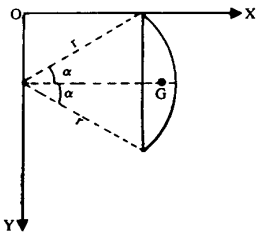
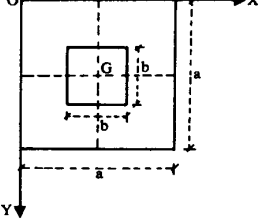
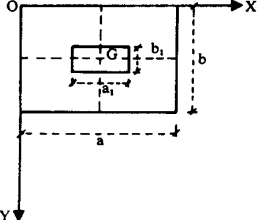
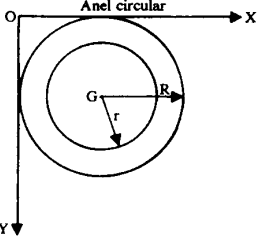
Figura	Área e momento de inércia	Centro de gravidade
	$A = r^2 \alpha \text{ (com } \alpha \text{ em rad)}$ $\text{ou } A = \frac{\alpha \pi r^2}{180}$ <p>(com α em graus)</p> $I_G = \frac{r^4 (\alpha - \text{sen } \alpha \cos \alpha)}{4}$	$x_G = \frac{2 r \text{sen } \alpha}{3 \alpha}$ $y_G = r \text{sen } \alpha$ <p>(α em rad)</p>
	$A = \frac{r^2}{2} (2 \alpha - \text{sen } 2 \alpha)$ <p>(com α em rad)</p> $I_G = \frac{A r^2}{4} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{\text{sen}^3 \alpha \cos \alpha}{2 \alpha - \text{sen } 2 \alpha} \right)$	$x_G = \frac{4 r \text{sen}^3 \alpha}{3(2 \alpha - \text{sen } 2 \alpha)}$ $y_G = r \cdot \text{sen } \alpha$ <p>(com α em rad)</p>
<p>Quadrado vazado</p> 	$A = a^2 - b^2$ $I_G = \frac{a^2 - b^4}{12}$	$x_G = y_G = \frac{a}{2}$
<p>Retângulo vazado</p> 	$A = a b - a_1 b_1$ $I_G = \frac{a b^3 - a_1 b_1^3}{12}$	$x_G = \frac{a}{2}$ $y_G = \frac{b}{2}$
<p>Anel circular</p> 	$A = \pi (R^2 - r^2)$ $I_G = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{4}$	$x_G = y_G = R$

Tabela 2.1 (cont.)

2.10 Equações dimensionais

- $p \rightarrow$ pressão $\rightarrow \{p\} = F.L^{-2}$
- $h \rightarrow$ carga pressão $\rightarrow \{h\} = L$
- $I \rightarrow$ momento de inércia $\rightarrow \{I\} = L^4$

2.11 Principais unidades de pressão

Mostramos além das unidades de pressão as unidades de carga de pressão, que são comumente utilizadas para definir pressão:

- SI $\rightarrow \{p\} = \frac{N}{m^2} = \text{Pa}$ (Pascal)
- MK* S $\rightarrow \{p\} = \frac{\text{kgf}}{m^2}$
- Sistema Inglês $\rightarrow \{p\} = \text{psi} = \frac{\text{lbf}}{\text{pol}^2}$
- Unidades usuais $\rightarrow \{p\} = \text{atm.}$ (atmosfera)
 - $\rightarrow \{p\} = \text{at}$ (atmosfera técnica)
 - $\rightarrow \{h\} = \text{mmHg}$ (milímetro de mercúrio)
 - $\rightarrow \{h\} = \text{mca}$ (metro de coluna d'água)
 - $\rightarrow \{h\} = \text{inHg}$ (polegada de mercúrio)
 - $\rightarrow \{p\} = \text{ba}$ (bária)
 - $\rightarrow \{p\} = \text{torr}$ (Torricelli)
 - $\rightarrow \{p\} = \text{bar}$

2.12 Relações entre unidades de pressão

Unidades	Símbolo	Relação com N / m ²
Pascal	Pa	1
-	kgf / m ²	9,81
-	psi	6893,69
atmosfera	atm.	101337,3
atmosfera técnica	at	98100
-	bar	10 ⁵
bária	ba	10 ⁻¹
Torricelli	torr	133,3
milímetro de mercúrio	mmHg	133,3
polegada de mercúrio	inHg	3386,8
metro de coluna d'água	mca	9810

2.13 Algumas considerações sobre o fluido manométrico, usado em manômetros de coluna de líquidos

O fluido manométrico utilizado em manômetros de coluna de líquidos deve apresentar duas características básicas:

- não ser miscível ao fluido que contém o ponto que se deseja determinar a pressão;
- ter peso específico superior à do fluido que contém o ponto que se deseja determinar a pressão.

O valor do peso específico é fundamental para a precisão do aparelho utilizado, já que estabelece a relação entre a faixa de medição da escala de graduação e o tamanho do manômetro.

Outros fatores que devem ser observados na escolha do fluido manométrico são:

- temperatura de utilização;
- viscosidade;
- pressão de vapor.

Somente sendo observados os fatores mencionados anteriormente, poderemos ter aparelhos com precisão aceitável para as aplicações da Engenharia.