
Isolados, mas aprendendo sempre
Teorema dos π
Vamos aplica-lo as bombas
Mesmo isolado nesta pandemia?
Ele também á chamado de Vaschy - Buckingham

Iniciamos evocando o principal objetivo de uma bomba hidráulica, que é propiciar uma variação de pressão no fluido quando o mesmo a atravessa, isto porque, ela é projetada com esta finalidade. Em seguida, elencamos as variáveis que influenciam este fenômeno.

$\Delta p =$ variação de pressão entre a entrada e saída da bomba

$\rho =$ massa específica do fluido

$\mu =$ viscosidade do fluido

$n =$ rotação da bomba

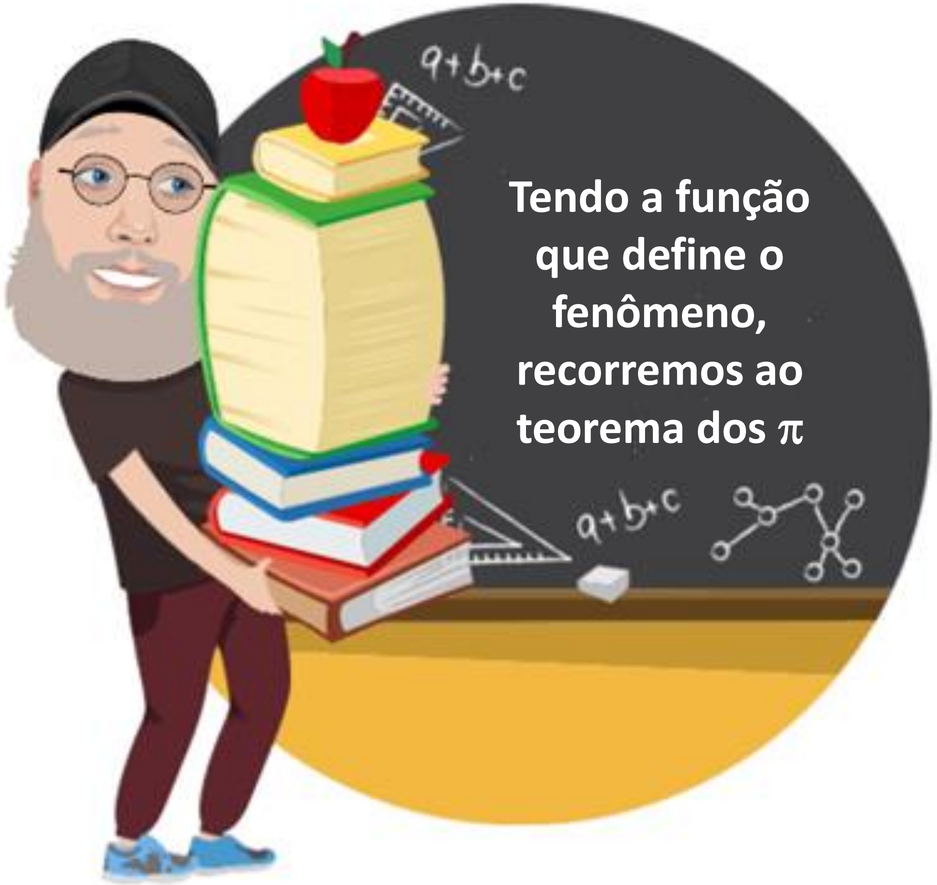
$Q =$ vazão do fluido

$N_B =$ potência da bomba

$D_r =$ diâmetro do rotor da bomba

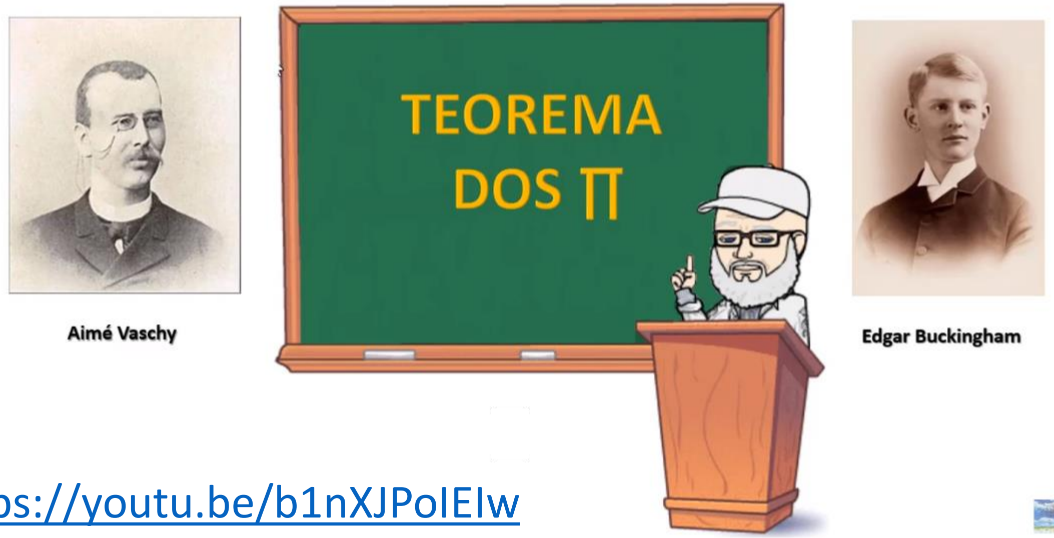
$$\Delta p = f\left(\rho, \mu, n, Q, N_B, D_r\right)$$

$$f(\Delta p, \rho, \mu, n, Q, N_B, D_r) = 0$$



Tendo a função que define o fenômeno, recorremos ao teorema dos π

Que também pode ser chamado de teorema de Vaschy – Buckingham, ou ainda teorema de Buckingham.



https://youtu.be/b1nXJPoIEIw

Teorema dos π passo a passo:

$$\Delta p = f\left(\rho, \mu, n, Q, N_B, D_r\right) \text{ ou } f(\Delta p, \rho, \mu, n, Q, N_B, D_r) = 0$$

1. Obtemos o número de variáveis (n) que influenciam o fenômeno – no caso da bomba n = 7

2. Escrevemos a equação dimensional de cada uma das variáveis. No caso de considerarmos o SI, as grandezas fundamentais para hidráulica são: M = massa; L = comprimento e T = tempo, todas as demais são denominadas de grandezas derivadas e devem ser definidas em função destas.

Para as bombas, teríamos: $[\Delta p] = M \times L^{-1} \times T^{-2}$

$$[\rho] = M \times L^{-3}$$

$$[\mu] = M \times L^{-1} \times T^{-1}$$

$$[n] = T^{-1}$$

$$[Q] = L^{3} \times T^{-1}$$

$$[N_B] = M \times L^{2} \times T^{-3}$$

$$[D_r] = L$$

Teorema dos π passo a passo (cont.):

$$\Delta p = f\left(\rho, \mu, n, Q, N_B, D_r\right) \text{ ou } f(\Delta p, \rho, \mu, n, Q, N_B, D_r) = 0$$

3. Obtemos o número de grandezas fundamentais (k) que atuam no fenômeno – no caso da bomba k = 3

4. Obtemos o número de números adimensionais (m) que definem o fenômeno, onde m = n – k, para a bomba, temos: m = 7 – 3 = 4, portanto, teremos que escrever quatro números adimensionais: π_1, π_2, π_3 e π_4.

5. Escolhemos a base dos adimensionais, que será sempre formada por "k" variáveis independentes, ou seja, aquelas que apresentam as equações dimensionais diferentes entre si de pelo menos uma grandeza fundamental. A base é comum aos adimensionais procurados com exceção dos expoentes.

   No caso das bombas adotamos como base: $\rho n D_r$

6. Escrevemos os adimensionais, que para a bomba seriam:

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times \Delta p \Rightarrow (1) \qquad \pi_3 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times N_B \Rightarrow (3)$$

$$\pi_2 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times Q \Rightarrow (2) \qquad \pi_4 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times \mu \Rightarrow (4)$$

Achamos os expoentes substituindo todas as variáveis e também o adimensional por suas equações dimensionais, isto possibilita trabalharmos com produto de potências e igualdades de expoentes, vejam:

$$\pi_1 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times \Delta p \Rightarrow (1)$$

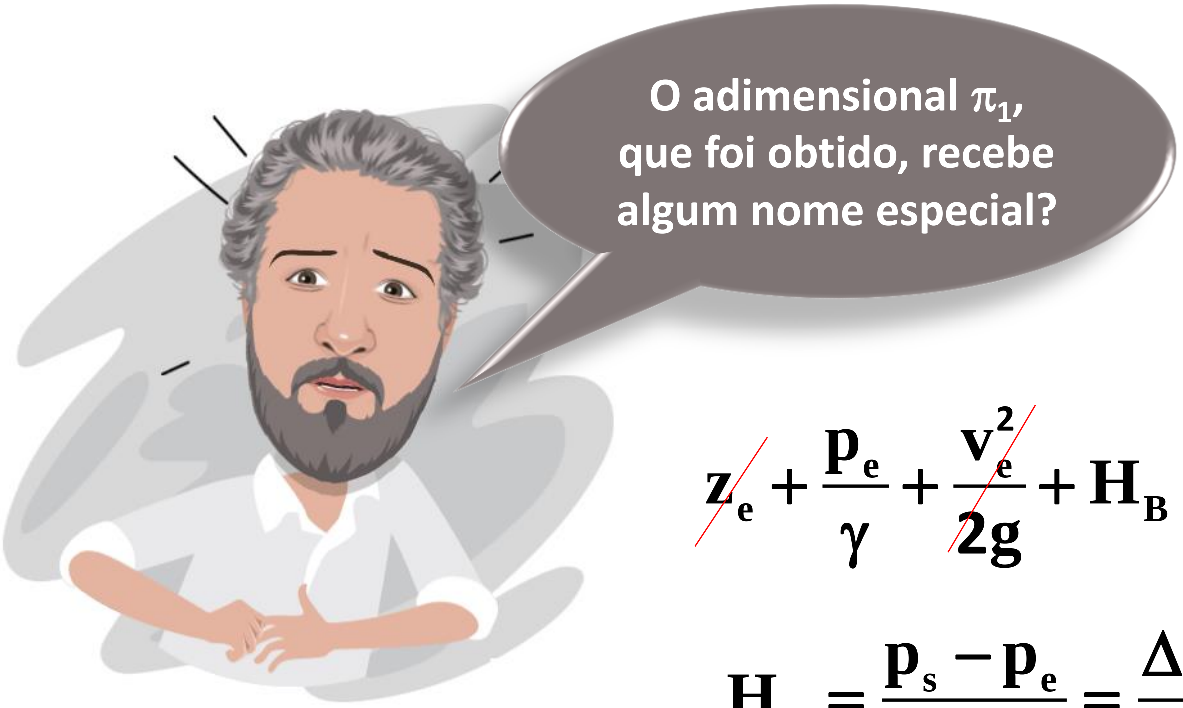
$$M^0 \times L^0 \times T^0 = \left(M \times L^{-3}\right)^{\alpha_1} \times \left(T^{-1}\right)^{\alpha_2} \times (L)^{\alpha_3} \times M \times L^{-1} \times T^{-2}$$

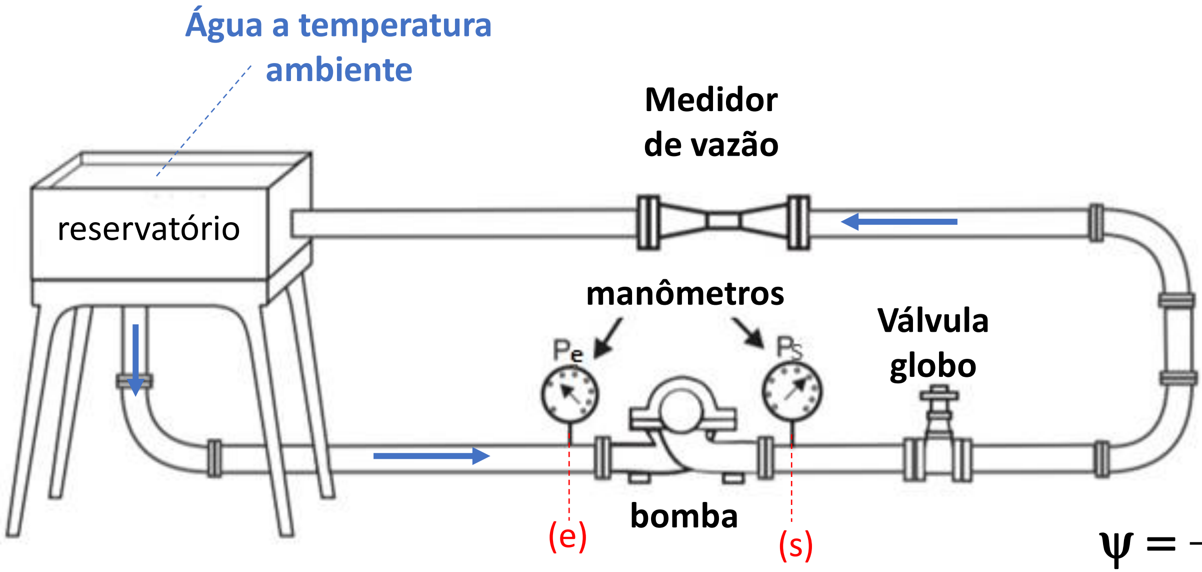
$$M^0 \times L^0 \times T^0 = M^{\alpha_1+1} \times L^{-3\alpha_1+\alpha_3-1} \times T^{-\alpha_2-2}$$

$$0 = \alpha_1 + 1 \therefore \boxed{\alpha_1 = -1} \qquad 0 = -3\alpha_1 + \alpha_3 - 1 \Rightarrow 0 = -3\times(-1) + \alpha_3 - 1 \therefore \boxed{\alpha_3 = -2}$$

$$0 = -\alpha_2 - 2 \therefore \boxed{\alpha_2 = -2}$$

$$\pi_1 = \rho^{-1} \times n^{-2} \times D_r^{-2} \times \Delta p \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \times n^2 \times D_r^2}}$$





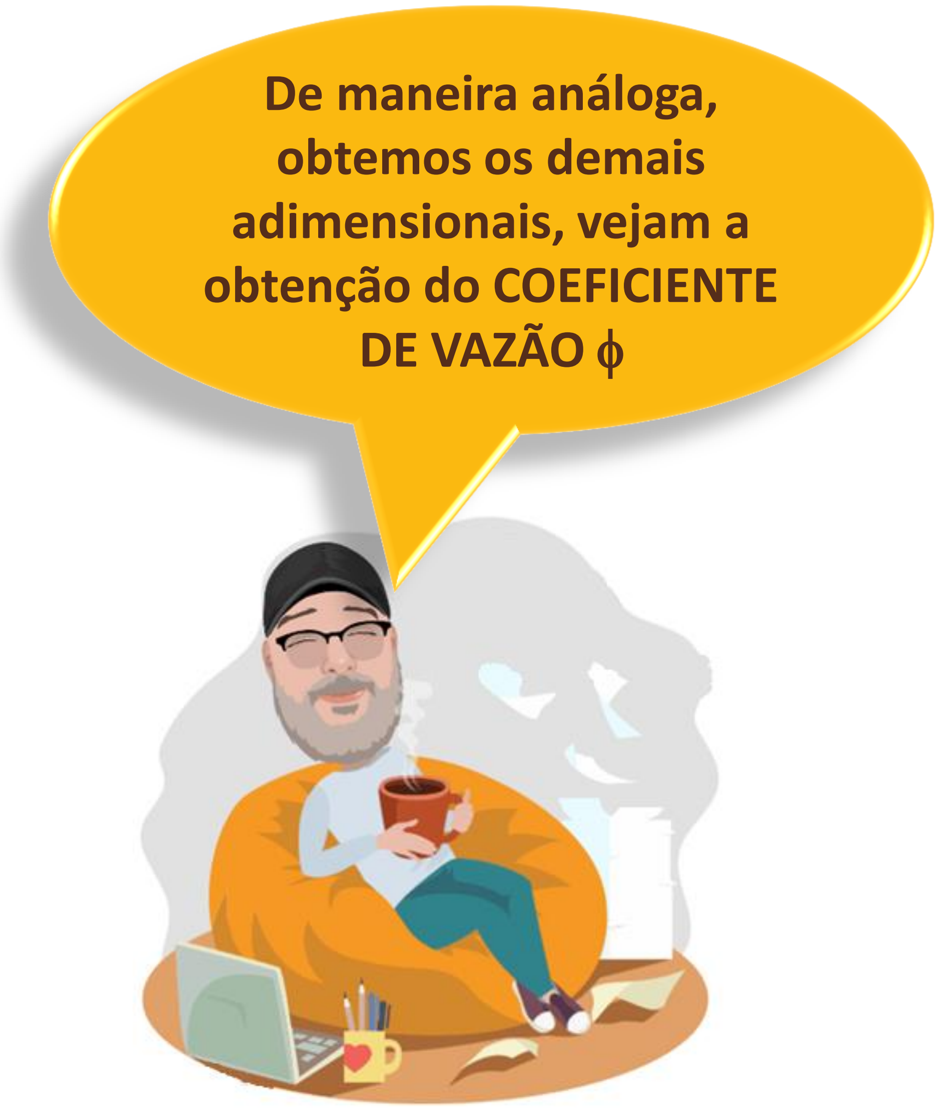
$$\psi = \frac{\gamma H_B}{\rho \times n^2 \times D_r^2} = \frac{\rho \times g H_B}{\rho \times n^2 \times D_r^2}$$

$$\boxed{\psi = \frac{g H_B}{n^2 D_r^2}}$$

$$H_e + H_B = H_S$$

$$\cancel{z_e} + \frac{p_e}{\gamma} + \cancel{\frac{v_e^2}{2g}} + H_B = \cancel{z_s} + \frac{p_s}{\gamma} + \cancel{\frac{v_s^2}{2g}}$$

$$H_B = \frac{p_s - p_e}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma} \therefore \boxed{\Delta p = \gamma H_B}$$



$$\pi_2 = \rho^{\alpha_1} \times n^{\alpha_2} \times D_r^{\alpha_3} \times Q \Rightarrow (2)$$

$$M^0 \times L^0 \times T^0 = \left(M \times L^{-3}\right)^{\alpha_1} \times \left(T^{-1}\right)^{\alpha_2} \times (L)^{\alpha_3} \times L^3 \times T^{-1}$$

$$M^0 \times L^0 \times T^0 = M^{\alpha_1} \times L^{-3\alpha_1 + \alpha_3 + 3} \times T^{-\alpha_2 - 1}$$

$$0 = \alpha_1 \therefore \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$$0 = -3\alpha_1 + \alpha_3 + 3 \Rightarrow 0 = 3 \times 0 + \alpha_3 + 3 \therefore \boxed{\alpha_3 = -3}$$

$$0 = -\alpha_2 - 1 \therefore \boxed{\alpha_2 = -1}$$

$$\pi_2 = \rho^0 \times n^{-1} \times D_r^{-3} \times Q \Rightarrow \pi_2 = \boxed{\frac{Q}{n \times D_r^3} = \phi}$$

Coeficiente de vazão

Analogamente, obtemos:

$$\chi = \frac{N_B}{\rho \times n^3 \times D_r^5}$$

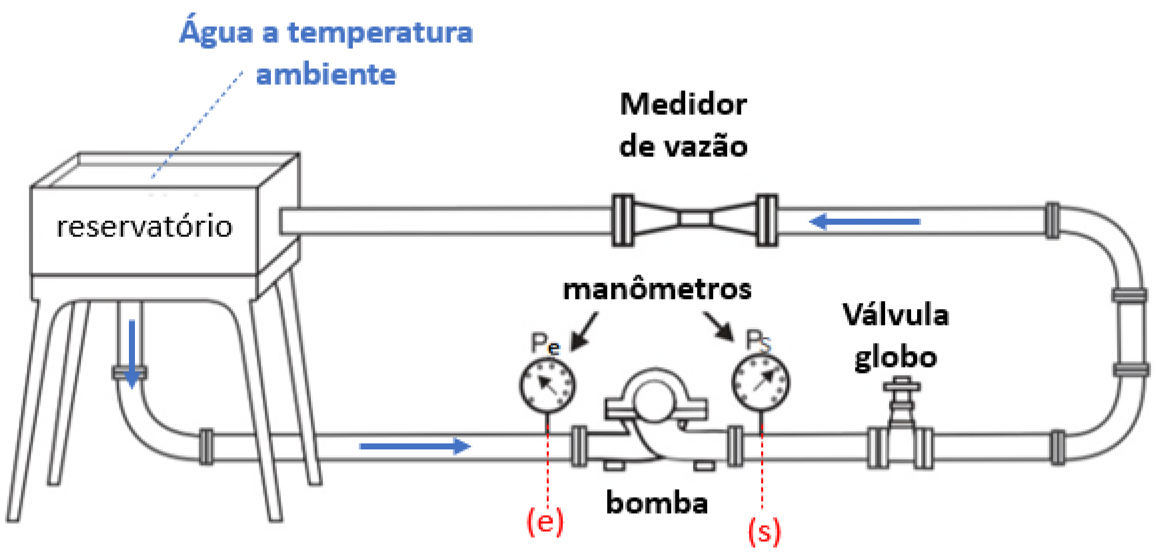
Coeficiente de potência

$$\pi_4 = \frac{\rho \times n \times D_r^2}{\mu}$$

Adimensional proporcional ao número de Reynolds e que deve ser usado para n < 500 rpm

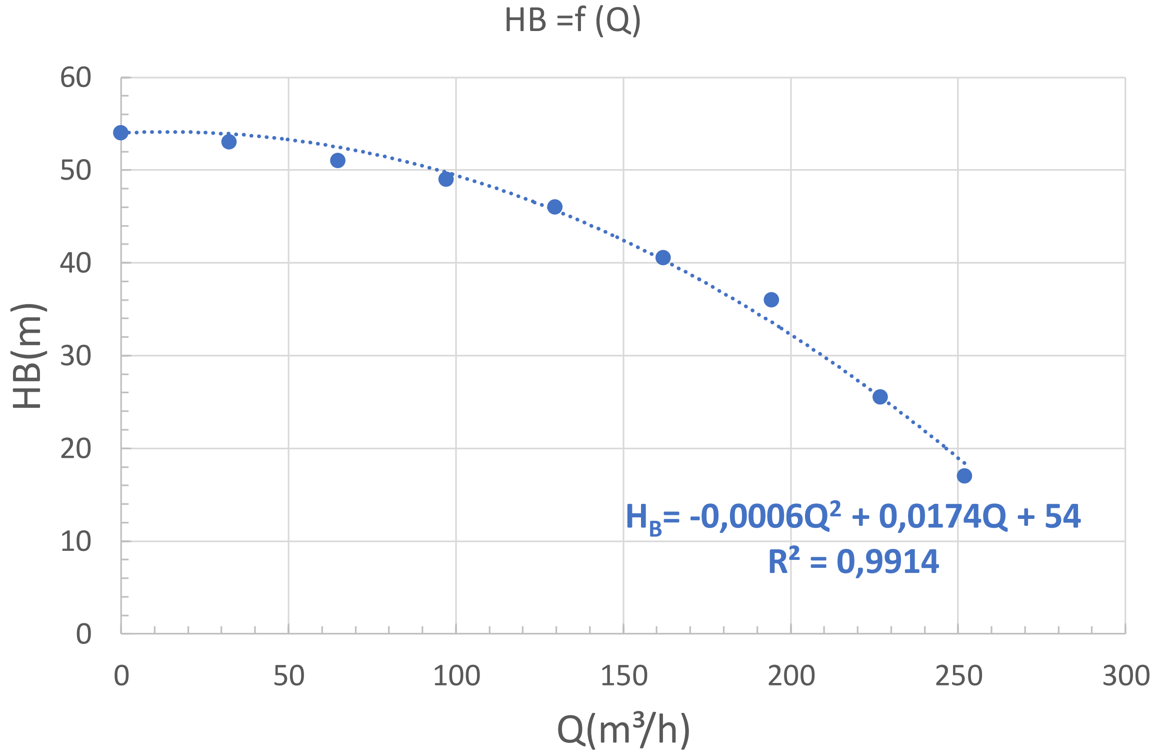
Os coeficiente manométrico (ψ) e o coeficiente de vazão (ϕ) são muito importantes para obtenção da curva HB = f(Q) variando com a rotação da bomba


Como HB = f(Q) vai variar em função da rotação?



Através da bancada, variando a vazão pela válvula globo, onde trabalhamos com uma bomba centrifuga com rotação de 3500 rpm e com diâmetro do rotor igual a 220 mm, obtivemos a tabela ao lado, e através dela traçamos a curva HB=f(Q)

Q(m³/h)	HB (m)
0	54
32,4	53
64,8	51
97,2	49
129,6	46
162	40,5
194,4	36
226,8	25,5
252	17



https://youtu.be/2vMyxceMj20

DESAFIO

COMO REPRESENTAR NO MESMO GRÁFICO DA BOMBA DE 3500 rpm A CURVA DE UMA BOMBA COMPLETAMENTE SEMELHANTE COM ROTAÇÃO DE 1750 rpm?

DICA

COMO AS BOMBAS (3500 rpm E 1750 rpm) SÃO TOTALMENTE SEMELHANTES, IMPOMOS AS CONDIÇÕES DE SEMELHANÇA, ONDE m = MODELO E p = PROTÓTIPO, NO NOSSO CASO O MODELO QUE FOI ENSAIADO TEM A ROTAÇÃO DE 3500 rpm E O PRTÓTIPO TEM A ROTAÇÃO DE 1750 rpm E AS CONDIÇÕES DE SEMELHANÇA SÃO OBTIDAS IGUALANDO OS ADIMENSIONAIS

$$\phi_m = \phi_p \Rightarrow \frac{Q_m}{n_m \times D_r^3} = \frac{Q_p}{n_p \times D_r^3} \therefore Q_p = \left(\frac{n_p}{n_m}\right) \times Q_m \text{ e } \psi_m = \psi_p \Rightarrow \frac{gH_{B_m}}{n_m^2 \times D_r^2} = \frac{gH_{B_p}}{n_p^2 \times D_r^2} \therefore H_{B_p} = \left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \times H_{B_m}$$

UMA BOMBA É ACIONADA POR UM MOTOR ELÉTRICO QUE TEM UMA ROTAÇÃO DE 1800 rpm E QUE ORIGINA UMA VAZÃO DE 3 L/s QUANDO A CARGA MANOMÉTRICA É 18 m. DETERMINE SUAS CARACTERÍSTICAS QUANDO O MOTOR TIVER UMA ROTAÇÃO DE 1500 rpm.